

# De la Reconstruction de Quadriques de Révolution à partir d'Images à la Complémentation d'Objets Naturels

Jérôme Guénard<sup>1</sup> Géraldine Morin<sup>1</sup> Pierre Gurdjos<sup>1</sup> et Vincent Charvillat<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IRIT-ENSEEIH, Toulouse

---

## Abstract

*Le but de cet article est de reconstruire un ensemble de quadriques de révolution à partir de deux images. Dans l'application décrite ici, cet ensemble modélise une grappe de raisin. Nous nous intéressons tout d'abord au problème de reconstruction d'une quadrique de révolution prolate (QRP) à partir de ses contours occultants. Cross et al. [CZ98] ont montré que trois contours étaient nécessaires pour reconstruire une quadrique générale. Nous apportons deux contributions majeures : d'une part, un paramétrage d'une quadrique de révolution dans l'espace projectif dual bien adapté au problème étudié et d'autre part, nous prouvons qu'il est possible de retrouver les images des foyers principaux de la QRP à partir de son contour occultant, à condition que les paramètres internes de la caméra soient connus. Ensuite, nous décrivons un nouveau schéma de triangulation linéaire avec deux types de contraintes, afin de retrouver la QRP à partir de deux vues seulement.*

*Nous utiliserons ce premier algorithme pour reconstruire toutes les QRPs visibles sur deux vues d'une grappe puis, nous chercherons un moyen de compléter celle-ci. Tout d'abord, nous reconstruirons les baies visibles sur seulement une vue en se servant d'un apprentissage fait sur les premières QRPs reconstruites. Puis, nous décrirons une méthode pour ajouter de nouvelles QRPs de manière cohérente sur la partie cachée. Le but est d'obtenir un modèle 3D réaliste de la grappe.*

---

## Abstract

*The aim of this paper is to reconstruct a set of quadrics of revolution from two images. In the application described here, this set models a cluster of grapes.*

*First we are interested in the problem of reconstructing a prolate quadric of revolution (QRP) from its occluding contour. Cross [CZ98] has shown that three contours were needed to reconstruct a general quadric [CZ98].*

*We propose two major contributions : first, a parameterisation of a quadric of revolution in the dual projective space and second, we prove that it is possible to recover the images of the principal focuses of the QRP from its occluding contour in a calibrated view. Then, we describe a new linear triangulation scheme with two types of constraints to find the QRP from two views only.*

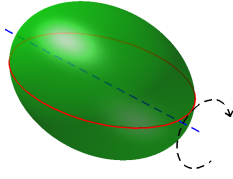
*We shall use the first algorithm to reconstruct all QRPs visible on two views of a cluster and then we want to complement the cluster coherently. First, we shall reconstruct berries visible on only one view using information from the reconstructed QRPs. Then, we describe a method for adding new QRPs consistently to the hidden parts. The goal is to get a realistic 3D model of the cluster.*

---

## 1. Introduction

La reconstruction 3D de surfaces et en particulier, de quadriques de révolution, est un problème classique en analyse et synthèse d'images et qui a déjà été fortement étu-

dié [FMV93] [ML96] [CZ98] [ST97] [WPE06]. Cependant, plus récemment, l'utilisation de la géométrie projective a permis de donner un éclairage nouveau à tous ces problèmes [CZ98].



**Figure 1:** Une quadrique de révolution prolata peut être vue comme la révolution d'une conique autour de son axe de symétrie passant par ses deux foyers principaux.

Aujourd'hui, la création de scènes 3D est utilisée dans de nombreux domaines. La reconstruction à partir d'images répond à ce problème avec peu de moyens : aujourd'hui, tout le monde possède un appareil photo. Nous proposons dans cet article de reconstruire tous les objets assimilables à des quadriques de révolution qui sont nombreux, en particulier dans des scènes naturelles : balles, fruits, antenne parabole, centrale nucléaire ... L'intérêt de cette méthode est qu'elle n'utilise que les contours de ces objets au lieu de les reconstruire point par point. La mise en correspondance entre les images est donc simplifiée ainsi que le temps de calcul.

En général, une quadrique a neuf degrés de liberté et se projette sur une image en une conique, appelée contour occultant de la quadrique, qui a cinq degrés de liberté. En 1998, Cross *et al.* ont montré qu'il existait un schéma de triangulation pour les quadriques [CZ98], utilisant les contours occultants de celles-ci dans l'espace dual. Cependant, il a prouvé que trois vues étaient nécessaires pour retrouver une solution unique.

Dans cet article, nous nous intéressons donc à la reconstruction de quadriques de révolution prolates qui ont seulement sept degrés de liberté. Elles peuvent être vues comme la révolution d'une conique autour de son axe de symétrie passant par ses foyers principaux (figure 1, page 2). Parmi elles, on peut citer les ellipsoïdes prolates, les hyperboloïdes à deux nappes ou encore les paraboloides.

#### Travaux précédents

Plusieurs personnes se sont déjà intéressées à ce problème comme Ferry *et al.* [FMV93] qui reconstruisait une quadrique de révolution de paramètres connus à partir d'une seule vue, ou encore Ma *et al.* [ML96] qui reconstruisait des ellipsoïdes à partir de trois vues. Pour reconstruire une quadrique, Cross *et al.* [CZ98] utilisait trois contours occultants ou seulement deux avec un point apparié, alors que Shashua *et al.* [ST97] se servait d'un seul contour occultant et de quatre points appariés. Enfin, Wijewickrema *et al.* [WPE06] a décrit un algorithme en deux étapes pour reconstruire des sphères à partir de deux contours occultants. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas de méthode linéaire pour reconstruire des quadriques de révolution à partir de seulement deux vues.

Les QRPs que nous reconstruisons dans notre application

sont les grains d'une grappe de raisin. Nous cherchons à reconstruire un modèle 3D réaliste en complétant les baies reconstruites. Pour cela, nous émettons l'hypothèse que l'objet à reconstruire est contenu dans des cylindres elliptiques par morceau. Nous commençons par reconstruire les QRPs visibles sur seulement une vue grâce à un apprentissage préalable sur les QRPs reconstruites. Nous cherchons ensuite un moyen d'ajouter des QRP de manière cohérente sur l'arrière de la grappe que l'on ne peut pas voir sur les images. Pour cela, nous cherchons des cylindres elliptiques dans lesquels devront se trouver ces nouvelles QRPs. Il existe également de nombreux travaux sur la complémentation comme Breckon *et al.* [BF05] qui complémentait la partie cachée d'une surface à partir du visible. Il appliquait également le relief et la texture sur la partie reconstruite. Beaucoup utilisait le fait qu'il existe soit un axe ou un plan de symétrie en 3D pour pouvoir reconstruire la partie cachée à partir du visible comme Utckel *et al.* [UZ03], soit un point ou un axe de symétrie en 2D comme le faisait Zabrodsky *et al.* [ZPAA93].

## 1.1. Rappels

Nous utilisons la géométrie projective car le modèle de la caméra est celui du sténopé, c'est-à-dire une caméra en trou d'épingle. En effet, nous sommes dans le cas où tous les objets 3D de la scène se projettent sur l'image via des rayons qui passent tous par un unique point : le centre optique de la caméra.

Trois étapes sont indispensables pour reconstruire des objets en 3D à partir d'images. Tout d'abord le calibrage de la caméra [HZ00], puis la mise en correspondance des pixels entre les images. Enfin, on est capable de trianguler pour connaître la position de l'objet en 3D. Ici, on supposera que le calibrage a été effectué : on travaille donc avec des vues calibrées.

### 1.1.1. Quadriques projectives

Une quadrique peut-être vue :

- dans l'espace primal  $\mathbb{P}_n$  comme un ensemble de points  $\mathbf{X} \in \mathbb{P}_n$  avec  $\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0$  où  $\mathbf{Q}$  est une matrice symétrique d'ordre  $n + 1$ .

- dans l'espace dual  $\mathbb{P}_n^*$  comme une enveloppe d'hyperplans  $\pi \in \mathbb{P}_n^*$  avec  $\pi^T \mathbf{Q}^* \pi = 0$  où  $\mathbf{Q}^*$  est une matrice symétrique d'ordre  $n + 1$ .

Si les hyperplans de  $\mathbf{Q}^*$  coïncident avec les hyperplans tangents de  $\mathbf{Q}$ , on aura  $\mathbf{Q} \sim (\mathbf{Q}^*)^{-1}$ .

Soit  $H$  une homographie quelconque de  $\mathbb{P}_n$ , une quadrique  $\mathbf{Q}$  se transforme en  $\mathbf{Q}' \sim H^{-T} \mathbf{Q} H^{-1}$  alors que dans le dual,  $\mathbf{Q}^*$  se transforme en  $\mathbf{Q}'^* \sim H \mathbf{Q}^* H^T$ . Une matrice de projection  $P$ , de dimension  $3 \times 4$ , transforme une quadrique  $\mathbf{Q}$  en une conique  $\mathbf{C}$  dans le plan image. Dans le dual, on aura  $\mathbf{C}^* \sim P \mathbf{Q}^* P^T$ .

Le rang d'une quadrique correspond au rang de sa matrice. Dans le cas d'un rang déficient, on dira que la quadrique est dégénérée. Ce qui est important à savoir, c'est qu'une quadrique duale  $Q^*$  dégénérée de rang 2 correspond à une paire de points  $(Y, Z)$  de  $\mathbb{P}^n$  et peut s'écrire sous la forme  $Q^* = YZ^\top + ZY^\top$ .

### 1.1.2. Signature des quadriques projectives

La signature d'une quadrique est définie par  $(\xi_1, \xi_2)$ , où  $\xi_1$  (respectivement  $\xi_2$ ) correspond au maximum (respectivement au minimum) entre le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives de la matrice de la quadrique.

Grâce à la loi de Sylvester [GL83, p. 403], on sait que la signature est la même dans n'importe quelle représentation projective. En particulier, la signature d'une quadrique duale de rang 2 est :

$$(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } Q^* \text{ est à une paire de points réels,} \\ (2, 0) & \text{si } Q^* \text{ est à une paire de points complexes} \\ & \text{conjugués.} \end{cases} \quad (1)$$

On a également  $\xi_1 + \xi_2 = \text{rang}(Q^*)$ .

## 2. Paramétrisation d'une QRP et recherche de l'image de son axe de symétrie

### 2.1. Une paramétrisation duale de la QRP

On décrit dans cette partie la paramétrisation de la QRP que nous utiliserons par la suite.

#### Proposition 1

Soient  $F$  et  $G$  deux points 3D réels distincts en coordonnées homogènes.

L'ensemble des QRPs ayant  $F$  et  $G$  comme foyers principaux peut être représenté, dans l'espace dual, par un ensemble de matrices symétriques  $4 \times 4$  :

$$Q^*(u) = uX^* + (1-u)Q_\infty^*, \quad (2)$$

pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$Q_\infty^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de la quadrique absolue duale se trouvant sur le plan à l'infini  $\pi_\infty$  et étant même sous n'importe quelle représentation euclidienne [HZ03, p84]. Enfin,

$$X^* = FG^\top + GF^\top,$$

est la quadrique duale dégénérée composée de la paire des foyers principaux  $(F, G)$ .

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [SK52, Som39]. L'ensemble de ces matrices est appelé *un faisceau de quadriques*. Notre idée clé est donc d'écrire la QRP, dans l'espace dual :

$$Q^* = X^* - x_0 Q_\infty^*, \quad (3)$$

où  $x_0$  est un scalaire non nul.

### 2.2. Une paramétrisation de l'image de la QRP

Tout faisceau de quadriques se projette sur une image en un faisceau de coniques dont les membres sont les images des quadriques du faisceau. Nous pouvons donc déduire un corollaire de la proposition 1.

#### Corollaire 1

L'image du faisceau de quadriques (2) est le faisceau de coniques représenté par les matrices symétriques  $3 \times 3$  :

$$C^*(u) = uY^* + (1-u)\omega^*, \quad (4)$$

pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$Y^* = fg^\top + gf^\top, \quad (5)$$

est la conique duale des images  $f, g$  des foyers principaux  $F, G$  et

$$\omega^* = KK^\top$$

est l'image duale de la conique absolue (CA) qui est une conique de points complexes situés dans le plan à l'infini  $\pi_\infty$ , très utilisée en vision pour retrouver les paramètres de calibrage.

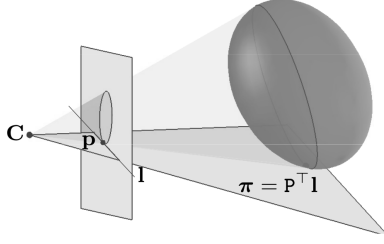
Ce corollaire se déduit simplement par projection de (2).

Le faisceau de coniques (4), image du faisceau de quadriques (2), est une famille linéaire 1D d'enveloppes incluant  $C^*$  le dual du contour occultant de la QRP. Tout faisceau de coniques peut être retrouvé à partir de deux de ses membres distincts, en particulier par  $C^*$  et  $\omega^*$ . Il devient donc  $C^* - y\omega^*$ . Or le faisceau  $C^* - y\omega^*$  possède trois membres dégénérés (i. e. dont la matrice est singulière)  $C^* - \lambda_i \omega^*$ ,  $i \in \{1..3\}$ . Parmi ces trois se trouve la conique duale (5). On peut donc en déduire une seconde proposition.

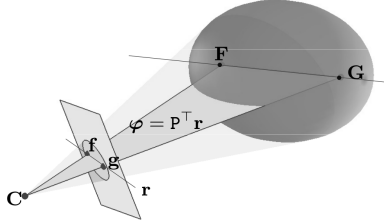
#### Proposition 2

A partir de l'image  $\omega$  de la CA et du contour occultant  $C$  de la QRP, la paire des images  $\{f, g\}$  des principaux foyers de la QRP peut être retrouvée, autrement dit, on peut retrouver de façon unique la conique duale dégénérée (5).

La démonstration de cette proposition a été faite dans [GCMG09].



**Figure 2:** Le plan passant par le centre de la caméra et une droite tangente au contour occultant est tangente à la QRP.



**Figure 3:** Le plan passant par le centre de la caméra et les images  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  des foyers principaux  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  passe par l'axe de révolution.

### 3. Reconstruction de la QRP à partir de ses contours occultants

#### 3.1. Cas de deux vues calibrées

On cherche à trouver suffisamment de contraintes sur la QRP pour pouvoir la reconstruire. On peut trouver deux types de contraintes linéaires avant de construire le système d'équations permettant la reconstruction.

##### • Contraintes sur les contours occultants

Soit  $\mathbf{C}$  le contour occultant de  $\mathbf{Q}$ . La rétro-projection en 3D d'une ligne  $\mathbf{l}$  tangent à  $\mathbf{C}$  en un point  $\mathbf{p}$  est le plan d'équation  $\pi = \mathbf{P}^T \mathbf{l}$  [HZ03, p197], défini par le centre de la caméra et la relation  $\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{p}$ . Ce plan fera donc partie de l'enveloppe de  $\mathbf{Q}$  et vérifiera donc  $\pi^T \mathbf{Q}^* \pi = 0$  (figure 2, page 4). En utilisant la paramétrisation (3), on a :

$$\pi^T \mathbf{X}^* \pi = x_0 (\pi^T \mathbf{Q}_\infty^* \pi). \quad (6)$$

##### • Contraintes sur l'image de l'axe de révolution

On a vu dans la partie précédente comment retrouver la matrice (5). On peut alors en déduire l'équation de la droite  $\mathbf{r}$ , image de l'axe de révolution de la QRP. La rétro-projection de cette droite en 3D sera donc le plan  $\varphi = \mathbf{P}^T \mathbf{r}$  passant par le centre de la caméra,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  (figure 3, page 4). Ce plan  $\varphi$  nous apporte donc de nouvelles contraintes linéaires :

$$\mathbf{X}^* \varphi = \mathbf{0}_4. \quad (7)$$

##### • Les équations de la base de reconstruction

Soit  $\mathbf{Q}$  une QRP vue dans deux vues calibrées et soient  $\mathbf{C}^i$  les contours occultants de  $\mathbf{Q}$  dans chaque vue  $i \in \{1, 2\}$ . On commence par retrouver la paire d'images des foyers  $\mathbf{Y}^{*i}$  de la QRP grâce à la proposition 2. On a donc l'équation de la droite  $\mathbf{r}^i$ , image de l'axe de révolution de la quadrique. Puis, on calcule les équations des droites  $\mathbf{l}_1^i$  et  $\mathbf{l}_2^i$  tangentes à  $\mathbf{C}^i$ . Chaque vue nous donne alors deux équations de type (6) et une équation de type (7), c'est-à-dire dix équations linéaires indépendantes sur le vecteur de onze inconnues :

$$\mathbf{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})^T, \quad (8)$$

où (en mettant le symbole '\*' à la place des éléments symétriques) :

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ * & x_5 & x_6 & x_7 \\ * & * & x_8 & x_9 \\ * & * & * & x_{10} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

On réécrit ensuite l'ensemble des équations (6,7) sous forme linéaire dans une grande matrice :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}_{10}, \quad (10)$$

où  $\mathbf{A}^i$  est la matrice  $5 \times 11$  associée à la vue  $i$ .

Le système (10) forme les *équations de base de la reconstruction*. Les contraintes sur l'image de l'axe de révolution apportent six des dix degrés de liberté de  $\mathbf{X}$  dans (8). Elles assurent également, pour  $i = 1..2$ , que  $\text{rang } \mathbf{X}^* = 2$ . Les autres contraintes (6), fournissent les quatre degrés de liberté manquant. Le système (10) est maintenant cohérent, c'est-à-dire que  $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \end{pmatrix} = 10$ . Une solution unique peut donc être retrouvée en contraignant  $\|\mathbf{X}\|^2 = 1$ . Cela signifie donc que le problème de reconstruction de QRP, à partir de ses contours occultants dans deux vues calibrées, est bien posé.

#### 3.2. Cas de plusieurs vues calibrées

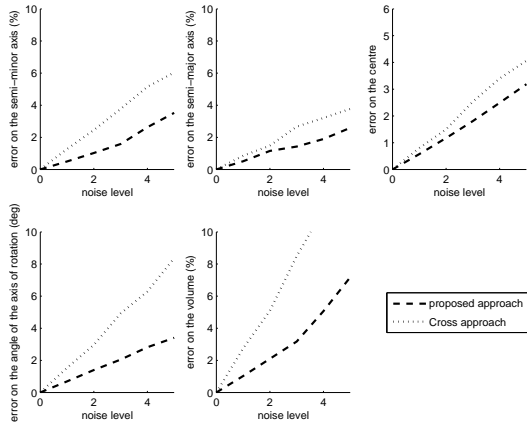
Nous avons montré comment reconstruire une QRP à partir de seulement deux vues. Seulement, dans la pratique, on peut disposer de  $n \geq 2$  vues. Le système (10) se transforme alors en  $\mathbf{D}\mathbf{X} \approx \mathbf{0}_{5n}$ , où  $\mathbf{D}$  est une matrice  $5n \times 11$  qui contient toutes les matrices  $\mathbf{A}^i$ ,  $i = 1..n$ , et l'opérateur ' $\approx$ ' exprime le fait que les matrices  $\mathbf{A}^i$  sont généralement bruitées. On trouvera donc la solution à ce problème au sens des moindres carrés en résolvant  $\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{D}\mathbf{X}\|^2$  sous contraintes  $\|\mathbf{X}\| = 1$ .

## 4. Résultats sur la reconstruction de QRP

### 4.1. Simulations

Nous avons voulu tester les performances de notre méthode en la comparant avec celle de Cross [CZ00], en faisant des simulations avec le logiciel MATLAB.

Nous avons aussi mesuré l'influence du bruit sur la qualité de la reconstruction (figure 4, page 5). L'algorithme de Cross nécessitant au minimum trois vues, nous avons simulé une scène où nous avons placé trois caméras calibrées sur une sphère englobant la scène. Chaque caméra a une position et une orientation différente et chacune vise un point proche du centre de la sphère. Puis nous avons généré une QRP dans cette sphère et nous avons calculé les coniques, images de la QRP, dans chaque vue. Nous avons alors calculé des points, se trouvant sur chaque conique, auxquels nous avons ajouté un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma = n\%$  du demi-grand axe de la conique. Chaque conique a été recalculée à partir des ces points bruités puis nous avons appliqué les algorithmes de reconstructions. Différentes erreurs comme les erreurs des demi-axes, la distance entre les centres des quadriques, l'angle entre les directions des axes de rotations ou encore les erreurs de volume sont mesurées. On peut remarquer que les erreurs augmentent linéairement avec le bruit et que notre méthode est plus performante que la méthode de Cross.



**Figure 4:** L'algorithme proposé est comparé avec celui de Cross. Différentes erreurs sont calculées par rapport au bruit sur les images.

### 4.2. Applications

Grâce à notre algorithme, nous sommes capables de reconstruire des QRPs. Nous pouvons maintenant reconstruire de nombreux objets formés d'un ensemble de QRPs comme, par exemple, des fruits et plus particulièrement ici une grappe. Nous utilisons deux caméras calibrées, formant un angle de 30 entre elles. Nous sommes alors en mesure de

reconstruire toutes les baies visibles sur les deux vues (figure 5, page 8). Cependant, toute la grappe ne peut pas être reconstruite. Pour cela, nous allons alors chercher à compléter le résultat obtenu en ajoutant des baies de manière cohérente sur l'arrière de la grappe.

## 5. Complémentation de la grappe

Plusieurs hypothèses sont faites sur la grappe pour pouvoir la compléter. Tout d'abord, tous les paramètres des axes des QRPs représentant les baies reconstruites sont très proches de ceux des baies cachées (*paramètres internes des QRPs*). Puis, nous supposons que la répartition des baies dans la partie reconstruite et dans la partie cachée est la même (*paramètres externes des QRPs*). Enfin, nous faisons l'hypothèse que la grappe est contenue dans des cylindres elliptiques par morceaux.

Nous commençons par faire un apprentissage sur la partie reconstruite de la grappe pour déterminer les paramètres internes des QRPs. Utilisant cet apprentissage, nous montrons qu'il est possible de reconstruire les QRPs visibles sur seulement une des deux vues. Nous déterminons ensuite les paramètres externes des QRPs. Enfin, nous détaillerons une méthode capable de compléter la partie de la grappe, invisible sur les deux vues.

### 5.1. Apprentissage sur les paramètres internes

La première étape consiste à évaluer une quadrique 'moyenne'. Pour cela, il suffit de récupérer les paramètres des quadriques à partir des matrices que l'on a retrouvées grâce à l'algorithme présenté dans le paragraphe précédent. Le centre  $\mathbf{c}$  d'une quadrique de matrice  $\mathbf{Q}$  est donné par les trois premières composantes de la quatrième colonne de  $\mathbf{Q}^*$  divisées par sa quatrième composante. Ensuite, on calcule la matrice :

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{T}^{-\mathbf{T}} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-1}$$

où

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_3 & -\mathbf{c} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs singulières de la matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche de  $\mathbf{Q}'$ . Les paramètres de la quadrique  $\mathbf{Q}$  correspondent alors aux racines carrées des inverses de ces valeurs.

On peut maintenant calculer une QRP 'moyenne' en calculant la moyenne  $M_a$  et l'écart-type  $\sigma_a$  des paramètres des axes de révolution ainsi que la moyenne  $M_b$  et l'écart-type  $\sigma_b$  des 2 autres petits axes de la QRP (qui sont égaux). En estimant que les paramètres des axes de révolution et ceux des deux autres axes suivent deux lois normales  $N(M_a, \sigma_a)$  et  $N(M_b, \sigma_b)$ , on pourra générer aléatoirement des QRPs suivant une loi multinormale de moyenne  $(M_a, M_b)$  et de

matrice de variance-covariance  $\mathbf{V}$  calculé comme expliqué dans [DHS00].

## 5.2. Reconstruction des QRPs visibles sur une seule vue

A partir du contour occultant d'une QRP dans une image, on a vu comment retrouver la paire  $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  des foyers principaux  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$  de la QRP. Soit  $\mathbf{P} = \mathbf{K}[\mathbf{I}|\mathbf{0}]$  la matrice de projection sur l'image, on a alors  $\mathbf{P}\mathbf{F} \sim \mathbf{f}$  et  $\mathbf{P}\mathbf{G} \sim \mathbf{g}$ . On nommera  $(S)$  le repère de la caméra de centre  $\mathbf{O}$ .

On se place maintenant dans un nouveau repère  $(S')$  de centre  $\mathbf{O}'$  le centre de la QRP et d'axe  $z$ , l'axe de révolution de la QRP (figure 6, page 8). Dans ce nouveau repère, si la QRP a pour petit axe  $a$  et pour grand axe  $b$ , ses deux foyers seront  $\mathbf{F}' = (0, 0, d, 1)^T$  et  $\mathbf{G}' = (0, 0, -d, 1)^T$  avec  $d = \sqrt{b^2 - a^2}$ . On aura alors  $\mathbf{P}'\mathbf{F}' = \lambda\mathbf{f}$  et  $\mathbf{P}'\mathbf{G}' = \mu\mathbf{g}$  où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent deux scalaires et  $\mathbf{P}' = \mathbf{K}[\mathbf{R}|\mathbf{t}]$ ,  $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$  est la matrice de rotation et  $\mathbf{t}$  est le vecteur de translation faisant passer de  $(S)$  à  $(S')$ .

On aura alors un système d'équations :

$$\begin{cases} d\mathbf{K}\mathbf{R}_3 + \mathbf{K}\mathbf{t} = \lambda\mathbf{f} \\ -d\mathbf{K}\mathbf{R}_3 + \mathbf{K}\mathbf{t} = \mu\mathbf{g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (d\mathbf{K}\mathbf{R}_3 + \mathbf{K}\mathbf{t}) \wedge \mathbf{f} = 0 \\ (-d\mathbf{K}\mathbf{R}_3 + \mathbf{K}\mathbf{t}) \wedge \mathbf{g} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Ce système n'a que quatre équations indépendantes alors que le problème a cinq degrés de liberté. On ne retrouve donc qu'une famille linéaire de solutions  $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ . On peut maintenant se ramener à un problème à deux inconnues  $u$  et  $v$  avec

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = (u\mathbf{U} + v\mathbf{V}),$$

$\mathbf{R}_1 = \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}\|} \wedge \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\bar{\mathbf{x}}\|}$  où  $\mathbf{w}$  (resp.  $\mathbf{x}$ ) désigne les trois premières composantes de  $\mathbf{U}$  (resp.  $\mathbf{V}$ ) et  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{R}_3$ .

Dans l'espace dual, un plan  $\pi$  tangent à une quadrique  $\mathbf{Q}^*$  vérifie :

$$\pi^T \mathbf{Q}^* \pi = 0 \quad (12)$$

En prenant deux droites  $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  tangentes à  $\mathbf{C}$  dans l'image, on peut calculer les plans  $\pi_1 = \mathbf{P}^T \mathbf{I}_1$  et  $\pi_2 = \mathbf{P}^T \mathbf{I}_2$ . Sachant que dans  $(S')$ , la matrice de la quadrique duale s'écrit :

$$\mathbf{Q}^{*'} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

on obtiendra donc deux nouvelles équations quadratiques :

$$\begin{cases} \pi_1^T \mathbf{Q}^{*'} \pi_2 = 0 \\ \pi_2^T \mathbf{Q}^{*'} \pi_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

qui nous fourniront quatre solutions  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_1, v_2)$ ,  $(u_2, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$ .

Cependant, connaissant les conditions d'acquisition, l'ambiguïté peut être enlevée.

## 5.3. Apprentissage sur les paramètres externes

On cherche la répartition des QRPs les unes par rapport aux autres. Pour cela, On calcule le centre de chaque QRP reconstruite. On obtient donc un nuage de points 3D. Puis, on calcule la distance moyenne  $M_r$  et l'écart-type  $\sigma_r$  entre chaque point et ses  $k$  plus proches voisins où  $k$  est un paramètre que l'on pourra faire varier. On obtient donc une nouvelle loi normale  $N(M_r, \sigma_r)$  sur la répartition des QRPs entre elles.

## 5.4. Recherche des cylindres elliptiques

On commence par calculer un nuage de points se trouvant sur le 'devant' des QRPs reconstruites, c'est-à-dire dont le produit scalaire de leur normale avec l'axe optique d'une caméra est négatif (figure 7, page 8). Puis, une ACP est effectuée sur ce nuage afin de connaître la direction  $\vec{h}$  expliquant le mieux ces points. Suivant cette direction, la grappe peut être découpé en  $n$  tranches. Pour chaque tranche, on cherche les points se trouvant à l'intérieur et on les projette sur un plan perpendiculaire à  $\vec{h}$ . Le cylindre elliptique pour cette tranche correspondra au cylindre de base, l'ellipse approximant le mieux ces points projetés et de hauteur, la hauteur de la tranche.

## 5.5. Ajout de nouvelles QRPs

Nous ne pouvons évidemment pas reconstruire ce que nous ne voyons pas mais nous souhaitons obtenir une grappe réaliste.

Une QRP dont les axes suivent la loi multinormale calculée précédemment est générée. Puis elle est positionnée dans l'espace de manière à ce qu'elle respecte une cohérence physique vis à vis des paramètres externes et des cylindres elliptiques. On réitère cette étape. On pourra par exemple les positionner aléatoirement une à une et les rejeter si elle ne respectent pas toutes les contraintes.

## 6. Conclusions et Perspectives

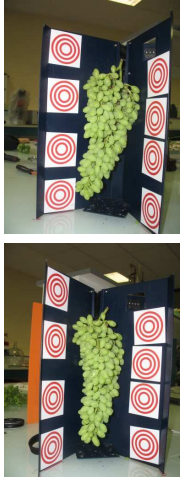
Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle méthode permettant de reconstruire une quadrique de révolution prolata à partir de deux contours occultants sur deux vues calibrées. Nous avons tout d'abord apporté un nouveau paramétrage de la QRP dans l'espace dual. Puis, après avoir expliqué comment retrouver les images des foyers principaux, nous avons décrit un système linéaire permettant de retrouver la QRP. L'utilisation des contours occultants présente plusieurs avantages par rapport aux points comme une

plus grande facilité de mise en correspondance et la robustesse au bruit. Enfin, nous avons cherché une méthode de complémentation d'objets naturels tels une grappe, en recherchant les cylindres elliptiques l'englobant et en insérant de nouvelles QRP de manière cohérente dans la partie cachée.

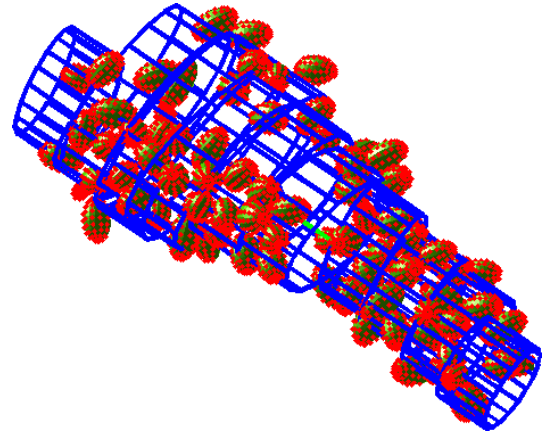
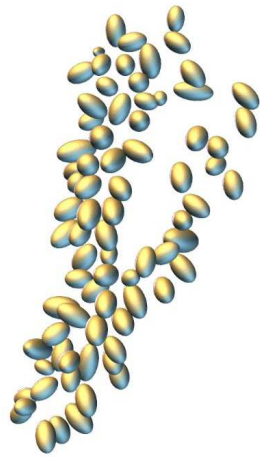
Il reste de nombreuses pistes sur lesquelles travailler comme l'amélioration de notre méthode de complémentation. Nous pourrions également retrouver la matrice fondamentale  $F$  à partir des images des foyers afin de pouvoir reconstruire même sans la connaissance a priori des positions relatives des caméras. Enfin, les quadriques de révolutions *non prolates* sont appelées *oblates*. Nous pourrions étendre notre méthode de façon à ce qu'elle marche pour tous les types de quadriques de révolution.

### References

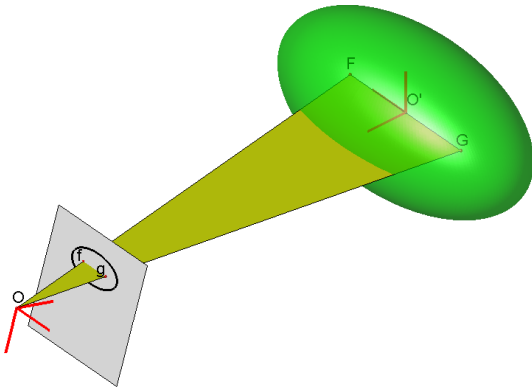
- [BF05] BRECKON T. P., FISHER R. B. : Non-parametric 3d surface completion. In *3DIM '05* (Washington, DC, USA, 2005), IEEE Computer Society, pp. 573–580.
- [CZ98] CROSS G., ZISSERMAN A. : Quadric reconstruction from dual-space geometry. In *ICCV* (Washington, DC, USA, 1998), IEEE Computer Society, p. 25.
- [CZ00] CROSS G., ZISSERMAN A. : Surface reconstruction from multiple views using apparent contours and surface texture. 25–47.
- [DHS00] DUDA R. O., HART P. E., STORK D. G. : *Pattern Classification*. Wiley-Interscience Publication, 2000.
- [FMV93] FERRI M., MANGILI F., VIANO G. : Projective pose estimation of linear and quadratic primitives in monocular computer vision. *CVGIP* 58, 1 (1993), 66–84.
- [GCMG09] GURDJOS P., CHARVILLAT V., MORIN G., GUENARD J. : Multiple view reconstruction of a quadric of revolution from its occluding contours. In *ACCV* (2009).
- [GL83] GOLUB G. H., LOAN C. F. V. : *Matrix Computations*, third edition 1996 ed. Johns Hopkins University Press, 1983.
- [HZ00] HARTLEY R., ZISSERMAN A. : *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2000.
- [HZ03] HARTLEY R., ZISSERMAN A. : *Multiple View Geometry in computer vision*. Cambridge Univ. Press, 2003.
- [ML96] MA S. D., LI L. : Ellipsoid reconstruction from three perspective views. In *ICPR* (Washington, DC, USA, 1996), IEEE Computer Society, p. 344.
- [SK52] SEMPLE J., KNEEBONE G. : *Algebraic Projective Geometry*, 1998 ed. Oxford University Press, 1952.
- [Som39] SOMMERVILLE D. : *Analytical Geometry of Three Dimensions*. Cambridge University Press, 1939.
- [ST97] SHASHUA A., TOELG S. : The quadric reference surface : Theory and applications. *Int. J. Comput. Vision* 23, 2 (1997), 185–198.
- [UZ03] UTCKEI S., ZISSERMAN A. : Projective reconstruction of surfaces of revolution. Springer Berlin / Heidelberg, pp. 265–272.
- [WPE06] WIJEWICKREMA S. N. R., PAPLINSKI A. P., ESSON C. E. : Reconstruction of spheres using occluding contours from stereo images. In *ICPR* (Washington, DC, USA, 2006), IEEE Computer Society, pp. 151–154.
- [ZPAA93] ZABRODSKY H., PELEG S., AVNIR D., AVNIR D. : Completion of occluded shapes using symmetry.



**Figure 5:** Sur la gauche, on voit les deux images de la grappe. Sur la droite, on voit la reconstruction de toutes les baies visibles sur les deux images.



**Figure 7:** Représentation de la grappe et de ses cylindres elliptiques, l'englobant par morceau.



**Figure 6:** Représentation de la quadrique dans l'espace avec le repère  $(S)$  de centre  $O$ , le centre optique de la caméra et le repère  $(S')$  de centre  $O'$ , le centre de la quadrique.